Научная статья
УДК 519.718.7
DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-119-141

О ЕДИНИЧНЫХ ПРОВЕРЯЮЩИХ ТЕСТАХ ПРИ КОНСТАНТНЫХ НЕИСПРАВНОСТЯХ НА ВЫХОДАХ ЭЛЕМЕНТОВ В ФОРМУЛАХ НАД НЕКОТОРЫМИ БАЗИСАМИ

Чжэнюй Цуй[1]
Дмитрий Сергеевич Романов[2]

[1,2]Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова,
Москва, Россия,

[1]ourobros1234@gmail.com
[2]romanov@cs.msu.ru;https://orchid.org/0000-0003-3016-3575

Аннотация

В статье установлены значения функций Шеннона длины единичного проверяющего теста при константных неисправностях на выходах элементов в булевых формулах над базисами $\{xy,\, x\oplus y,\, 1\}$, $\{x\vee y,\, x\sim y,\, 0\}$, $\{xy,\, x\sim y,\, 0\}$, $\{x\vee y,\, x\oplus y,\, 1\}$, $\{x\bar{y},\, x\sim y\}$, $\{x\vee \bar{y},\, x\oplus y\}$.

Ключевые слова и фразы

проверяющий тест, константные неисправности, схема из функциональных элементов, булева формула.

Источник финансирования

Исследования авторов поддержаны Московским центром фундаментальной и прикладной математики МГУ имени М. В. Ломоносова по соглашению No 075-15-2025-345.

Для цитирования

Цуй Ч., Романов Д. С. О единичных проверяющих тестах при константных неисправностях на выходах элементов в формулах над некоторыми базисами // *Математические труды*, 2026, Т. 29, № 1, С. 119-141. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-119-141

© Цуй Ч., Романов Д. С., 2026

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 119-141
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 119-141

Single fault detection test sets with respect to stuck-at faults at the outputs of gates in formulas over some bases

Zh. Cui[1], Dmitrii S. Romanov[2],

[1,2] Lomonosov Moscow State University
Moscow, Russia

[1]ourobros1234@gmail.com
[2]romanov@cs.msu.ru;https://orchid.org/0000-0003-3016-3575

Abstract

The article establishes the exact values of the Shannon function of the cardinality of a single fault detection test set with respect to stuck-at faults at outputs of gates in formulas over the bases $\{xy,\, x \oplus y,\, 1\}$, $\{x \vee y,\, x \sim y,\, 0\}$, $\{xy,\, x \sim y,\, 0\}$, $\{x \vee y,\, x \oplus y,\, 1\}$, $\{x\bar{y},\, x \sim y\}$, $\{x \vee \bar{y},\, x \oplus y\}$.

Keywords

single fault detection test set, stuck-at faults, Boolean circuit, Boolean formula.

Funding

The authors' research is supported by the Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics of Lomonosov Moscow State University under agreement No. 075-15-2025-345.

For citation

Cui Zh., Romanov D. S., Single fault detection test sets with respect to stuck-at faults at the outputs of gates in formulas over some bases// *Mat. Trudy*, 2026, V. 29, N. 1, P. 119-141. DOI 10.25205/1560-750X-2026-29-1-119-141

§ 1. Введение и постановка задачи

В настоящей работе исследуются длины единичных проверяющих тестов относительно константных неисправностей функциональных символов в реализующих булевы функции формулах над некоторыми функционально полными базисами (при этом будет предполагаться, что любой базис неявным образом содержит тождественную функцию). Формулы, реализующие булевы функции, представляют собой [1, §§ 2–3 гл. 2] частный случай схем из функциональных элементов (СФЭ), являясь приведенными СФЭ с одним выходом, не имеющими ветвлений на выходах функциональных элементов. В силу этого в данной статье при описании формул будет допускаться «схемная» терминология. Так, вместо термина «функциональный символ» будет использоваться термин «функциональный элемент», будет упоминаться о входах формулы, о дугах, ведущих ко входам функционального элемента, и т. д.

Пусть на СФЭ (формулу) S над функционально полным базисом B, реализовывавшую в отсутствие неисправностей булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, подействовал источник неисправностей U, способный преобразовать S в любую схему (формулу) из конечного множества H схем (формул), содержащего S. При этом источник неисправностей U не может добавлять к схеме новые входы и выходы. Источник неисправностей, как правило, задается видами и количествами поломок, которые он может породить в схеме.

Константные неисправности на выходах функциональных элементов состоят в заменах неисправных функциональных элементов на такие функциональные элементы, которые реализуют константы. Так, источник O_1^{c} (соответственно IO_1^{c}) — это источник одиночных произвольных константных неисправностей на выходах (соответственно на входах и выходах) функциональных элементов.

Множество T входных наборов схемы S называется *проверяющим тестом* для схемы S относительно источника неисправностей U тогда и только тогда, когда для любой схемы S' из множества H верна импликация: если S' реализует булеву функцию $g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, не равную f, то в T имеется такой набор $\tilde{\alpha}$, что $f(\tilde{\alpha}) \neq g(\tilde{\alpha})$.

Число наборов в тесте T — это *длина* $L(T)$ *теста* T. Тест минимальной длины называется минимальным. Через $L^{\mathrm{dt}}(U, S)$ обозначим длину минимального проверяющего теста для схемы или формулы S относительно источника неисправностей U.

При определении длины минимального теста для реализуемой в некотором классе схем булевой функции предполагается нацеленный на минимизацию длины теста содержательный перебор реализующих эту функцию схем. Если источник неисправностей U вызывает лишь одиночные поломки элементов схемы (что имеет место и в задачах, рассматриваемых здесь), подобный перебор исчерпывает так называемые неизбыточные схемы с тем, чтобы исключить, в частности, возможность самокорректирования схем относительно данного источника неисправностей. *Неизбыточной* относительно источника неисправностей U называется такая схема (формула) S, что при любой нетривиальной (т. е. меняющей хоть на каком-то входном наборе значение на выходе хоть какого-то функционального элемента) вызванной источником U одиночной поломке функционального элемента полученная из S схема (соответственно формула) реализует функцию, не равную функции, реализуемой S в отсутствие неисправностей. Длиной минимального проверяющего теста для булевой функции f, реализуемой СФЭ (формулами) над базисом B, относительно источника неисправностей U называется минимум $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(U,f)$ (соответственно $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(U,f)$) по всем неизбыточным реализующим f схемам (соответственно формулам) S над базисом B величин $L^{\mathrm{dt}}(U,S)$. В тех случаях, когда для функции f не существует неизбыточных относительно источника неисправностей U СФЭ (формул) над базисом B, будем считать, что $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(U,f) = 0$ (соответственно $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(U,f) = 0$). Через $P_2(n)$ будем обозначать множество всех булевых функций от переменных $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. *Функцией Шеннона длины проверяющего теста относительно источника неисправностей* U для СФЭ (формул) над базисом B называется величина

$$L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(U,n) = \max_{f\in P_2(n)} L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(U,f)$$

$$(\text{соответственно } L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(U,n) = \max_{f\in P_2(n)} L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(U,f)).$$

Ранее в работах иных авторов задача оценивания функций Шеннона длин тестов для булевых функций, реализуемых формулами, находящимися под действием вызывающих поломки функциональных элементов источников неисправностей, специальным образом не ставилась. Но некоторые результаты для СФЭ, — например, константные верхние оценки для функций Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно инверсных неисправностей на выходах функциональных элементов в СФЭ над некоторыми базисами [2], — фактически являются и соответствующими результатами для формул. Впрочем, при получении константных верхних оценок функций Шеннона длины единичного проверяющего теста при произвольных константных неисправностях на выходах элементов в СФЭ ранее использовались только схемы с ветвлениями на выходах функциональных элементов, а не формулы.

Описывая известные результаты, близкие к задаче оценивания функций Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно произвольных константных неисправностей на выходах функциональных элементов в СФЭ, будем, если не указано иное, считать, что приводимые оценки функций Шеннона имеют место для любого n, $n \geq 2$, $n \in \mathbb{N}$. В [3] фактически доказано, что в базисе $B_1 = \{x \,\&\, y,\, x \oplus y,\, 1\}$ любая булева функция n переменных может быть смоделирована формулой с одним дополнительным аргументом, допускающей универсальный (т. е. не зависящий от булевой функции) единичный проверяющий тест длины не более $n+4$ относительно IO^{c}_1. В [4] данная верхняя оценка снижена до $n+3$, а в [5, стр. 113–116] фактически установлено, что $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(IO^{\mathrm{c}}_1, n) \leqslant n+3$. В работах [6]–[9] доказано, что в произвольном полном базисе B имеет место оценка $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) \leqslant n+3$ (в ряде базисов фактически используются формулы). В [10] для базиса $B'_1 = \{x \,\&\, y,\, x\oplus y,\, x\sim y\}$ установлено, что $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B'_1}(IO^{\mathrm{c}}_1,n) \leqslant 16$. В [11] для произвольного конечного полного базиса B доказано, что $2 \leqslant L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) \leqslant 4$. В [12] установлено, что при $n \geq 3$ в любом полном базисе B, содержащемся в множестве элементарных конъюнкций с одинаковыми степенями переменных, линейных функций двух переменных и функций, представляющих собой конъюнкцию $x_1\bar{x}_2$ и некоторой функции, $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) \geqslant 3$. В [13] найдено точное значение $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},\{xy,\,\bar{x},\,x\oplus y\oplus z\}}(O^{\mathrm{c}}_1,n) = 2$. В [14] установлено следующее неравенство: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{C},\{xy,\,x\oplus y,\,1,\,0\}}(O^{\mathrm{c}}_1,n) \leqslant 3$. Отметим, что в работах [2]–[9], [12, 13, 14] использовалось отличное от применяемого здесь определение неизбыточной схемы, не делающее исключений для тривиальных константных неисправностей неконстантных функциональных элементов.

§ 2. Формулировка и доказательство основного результата

Введем функционально полные неизбыточные базисы $B_1 = \{xy,\, x\oplus y,\, 1\}$, $B_1^* = \{x\vee y,\, x\sim y,\, 0\}$, $B_2 = \{xy,\, x\sim y,\, 0\}$, $B_2^* = \{x\vee y,\, x\oplus y,\, 1\}$, $B_3 = \{x\bar{y},\, x\sim y\}$, $B_3^* = \{x\vee \bar{y},\, x\oplus y\}$.

Основным результатом настоящей работы является следующая теорема о значениях функции Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно одиночных константных неисправностей на выходах элементов для формул над базисом B, $B \in \{B_1,\, B_1^*,\, B_2,\, B_2^*,\, B_3,\, B_3^*\}$.

Теорема 1. *Для любого B из $\{B_1, B_1^*, B_2, B_2^*, B_3, B_3^*\}$ имеют место следующие равенства: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) = 1$ при $n=0$, $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) = 2$ при $n=1$, $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) = 3$ при любом натуральном n, $n \geqslant 3$. Для любого B из $\{B_1, B_1^*, B_2, B_2^*\}$ при $n=2$ верно равенство $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) = 3$. Для любого B из $\{B_3, B_3^*\}$ при $n=2$ верно равенство $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) = 2$.*

Докажем несколько лемм.

Лемма 1. *Для любого B из $\{B_1, B_1^*, B_2, B_2^*\}$ справедливо неравенство $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) \geqslant 3$ при всяком n, $n \geqslant 2$. Для любого B из $\{B_3, B_3^*\}$ справедливо неравенство $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1,n) \geqslant 3$ при всяком n, $n \geqslant 3$.*

Доказательство. Случай 1. Рассмотрим случай базиса $B \in \{B_1, B_2\}$. Пусть $f = x_1 \vee x_2$, а S — неизбыточная формула над базисом B, зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 2$), реализующая f и допускающая единичный проверяющий тест из двух наборов θ, ξ. Отметим, что, поскольку функция f не равна константе, на выходе формулы возникают оба значения 0 и 1, так что длина теста не меньше двух (на одном наборе невозможно обнаружить одну из двух константных неисправностей на выходе выходного элемента, — противоречие с неизбыточностью формулы S). Функцию от переменных формулы S, реализуемую на выходе функционального элемента $\mathcal{E}$ в отсутствие неисправностей, обозначим как $f_{\mathcal{E}}$. Функция f является нелинейной, следовательно, в S найдется такой ближайший к выходу формулы конъюнктор E, что функция f_E — нелинейная, в каждой вершине, из которой проведена дуга ко входу E, реализуется неравная константе функция, и для всякого функционального элемента $\tilde{E}$, принадлежащего к единственной простой ориентированной цепи C от конъюнктора E к выходу формулы S, функция $f_{\tilde{E}}$ также является нелинейной. Если подобных конъюнкторов в S имеется несколько, любой из них можно взять в качестве E. Пусть u (v) — та вершина, дуга из которой ведет к левому (соответственно правому) входу конъюнктора E. Поскольку на выходе E в отсутствие неисправностей возникают оба булевых значения, имеем: $f_E(\theta) \neq f_E(\xi)$. Пусть, не ограничивая общности, $f_E(\theta) = 0$, $f_E(\xi) = 1$ (и, значит, на наборе ξ на обоих входах элемента E также возникают единичные значения). Переберем различные подслучаи.

Подслучай 1.1. Допустим, в вершинах u, v находятся функциональные элементы (назовем их соответственно E', E''). Не ограничивая общности, предположим, что $f_{E'}(\theta) = 0$. В силу выбора E в вершинах u, v реализуются отличные от констант функции, так что $f_{E'}(\theta) \neq f_{E'}(\xi)$, $f_{E''}(\theta) \neq f_{E''}(\xi)$. При этом на наборах θ, ξ должны обнаруживаться обе константные неисправности на выходах E', E''. Но E — конъюнктор, и обнаружить все эти неисправности невозможно: на наборе θ нельзя обнаружить неисправность типа «1» на выходе E'', ибо на выходе E и при наличии этой неисправности, и при отсутствии неисправностей возникает 0, так что значения на выходе схемы в обоих этих случаях будут равными (на наборе ξ также невозможно обнаружить неисправность типа «1» на выходе E'', поскольку $f_{E''}(\xi) = 1$). Пришли к противоречию.

Подслучай 1.2. Хотя бы одна из вершин u, v является входной вершиной формулы S. Предположим, не умаляя общности, что вершине u приписана переменная x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

1.2.1. По определению элемента E на цепи C не может оказаться такого функционального элемента e, что $f_e \equiv 0$ или $f_e \equiv 1$. Наборы θ, ξ составляют проверяющий тест, значит, на наборах θ и ξ на выходе всякого функционального элемента цепи C появляются оба булевых значения.

1.2.2. Пусть $\hat{E}$ — такой ближайший к E элемент сложения по модулю 2 или эквивалентности на цепи C, что к его входу, не участвующему в передаче сигналов вдоль цепи C, проведена дуга из вершины w, в которой на наборах θ, ξ появляются оба булевых значения. Но, значит, $f_{\hat{E}}(\theta) = f_{\hat{E}}(\xi)$, а это противоречит неизбыточности формулы S ввиду того, что некоторая нетривиальная константная неисправность на выходе элемента $\hat{E}$ не может быть обнаружена.

1.2.3. Если условие п. 1.2.2 не выполняется, то на цепи C могут оказаться элементы только со следующими свойствами:

- элементы сложения по модулю 2 и эквивалентности, к не участвующим в передаче сигналов вдоль цепи C входам которых проведены дуги лишь из входных вершин (более того, каждая из приписанных таким входным вершинам переменных должна принимать одинаковые значения на наборах θ, ξ),

- элементы сложения по модулю 2 и эквивалентности, к не участвующим в передаче сигналов вдоль цепи C входам которых проведены дуги лишь из таких вершин, в которых реализуются тождественные константы, и

- конъюнкторы, к не участвующим в передаче сигналов вдоль цепи C входам которых проведены дуги лишь из таких вершин, в которых реализуются константы «1».

1.2.3.1. Допустим, в цепи C встречается элемент сложения по модулю 2 или эквивалентности, к одному из входов которого проведена дуга из входной вершины формулы S. Если таких элементов хотя бы два, а среди переменных, приписанных входным вершинам, из которых проведены дуги ко входам таких элементов, имеются и x_1, и x_2, то на наборах θ, ξ каждая из существенных переменных f принимает одинаковые значения. Вследствие этого некоторая константная неисправность выходного элемента формулы S не будет обнаружена, — мы получили противоречие с неизбыточностью S. Допустим теперь, что в цепи C на входы функциональных элементов сложения по модулю 2 или эквивалентности могут быть проведены дуги от входных вершин лишь одной существенной переменной функции f из двух, — а именно, не умаляя общности, переменной x_1. Тогда $f = x_i\varphi \oplus cx_1 \oplus \lambda \oplus d$, где $c, d \in \{0,1\}$, φ — некоторая булева функция, а λ — линейная булева функция, зависящая только от фиктивных переменных функции f. Если $i = 1$, то $f \neq x_1 \vee x_2$, ибо значение f не зависит от x_2 при $x_1 = 0$, — противоречие. Если $i = 2$, а к правому входу элемента E проведена дуга от элемента E'', то для того, чтобы обнаружить две константные неисправности на выходе E'', переменная x_2 должна обращаться в единицу на обоих наборах θ, ξ. Но тогда на наборах θ, ξ каждая из существенных переменных функции f принимает одинаковые значения, поэтому некоторая константная неисправность выходного элемента формулы S обнаружена не будет, — мы снова получили противоречие с неизбыточностью S. Если $i = 2$, и при этом к правому входу элемента E проведена дуга от входной вершины, а этой входной вершине приписана переменная x_j ($j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $j \neq 2$), то $f = x_2 x_j \oplus cx_1 \oplus \lambda \oplus d \neq x_1 \vee x_2$, — противоречие. Если $i > 2$, то $f \neq x_1 \vee x_2$, ибо переменная x_i окажется существенной для формулы S, поскольку она встречается в слагаемом наибольшей степени полинома Жегалкина нелинейной функции $x_i\varphi$. Противоречие с тем, что формула S реализует f. Пусть теперь в цепи C не встречается ни один элемент сложения по модулю 2 или эквивалентности, к одному из входов которого проведена дуга из такой входной вершины формулы S, которой приписан символ переменной из множества $\{x_1, x_2\}$, но могут встречаться элементы сложения по модулю 2 или эквивалентности, к незадействованным в передаче сигналов вдоль цепи C входам которых проведены дуги из таких входных вершин формулы S, которым приписаны символы переменных из множества $\{x_3, \ldots, x_n\}$. Тогда $f = x_i\varphi \oplus \lambda$, где φ — некоторая булева функция, а λ — линейная булева функция, не зависящая от существенных переменных функции f. Если $f = x_1 \vee x_2$, то $x_i\varphi \oplus \lambda \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \equiv 0$, но это невозможно, ибо в полиноме Жегалкина функции $x_i\varphi \oplus \lambda \oplus x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2$ в качестве слагаемого останется всякая переменная из множества $\{x_1, x_2\}$, которая отлична от x_i (и эта функция будет иметь хотя бы одну существенную переменную в силу теоремы о единственности полинома Жегалкина), — противоречие.

1.2.3.2. При невыполнении условий пунктов 1.2.2 и 1.2.3.1 для любого элемента (сложения по модулю 2, эквивалентности или конъюнкции) цепи C справедливо, что к не участвующему в передаче сигналов вдоль цепи C его входу проведена дуга из вершины, в которой реализуется тождественная константа. Тогда на выходе формулы S реализуется булева функция вида $g = x_i\varphi \oplus d$, где $d \in \{0, 1\}$, а φ — некоторая функция. Но значение функции g при $x_i = 0$ не зависит от значений не равных x_i существенных переменных функции $f = x_1 \vee x_2$, поэтому $g \neq x_1 \vee x_2$. Противоречие с тем, что формула S реализует f.

Поскольку в каждом возможном варианте мы пришли к противоречию, заключаем: длина минимального проверяющего теста для произвольной неизбыточной формулы, реализующей дизъюнкцию $x_1 \vee x_2$, не меньше трех. При любом натуральном n, $n \geqslant 2$, имеем: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, n) \geqslant L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, x_1 \vee x_2) \geqslant 3$, что и доказывает утверждение леммы при $B \in \{B_1, B_2\}$.

Случай 2. Рассмотрим случай базиса $B = B_3 = \{x\bar{y}, x \sim y\}$ и $n \geqslant 3$. Функциональный элемент $x\bar{y}$ будем именовать косым конъюнктором или элементом косой конъюнкции, полагая далее по умолчанию, что от первого (левого) аргумента косая конъюнкция зависит монотонно, а от второго (правого) — антимонотонно. Заметим: $x_1\bar{x}_1 \equiv 0$. Пусть $f = m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, а S — неизбыточная формула над базисом B, зависящая от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ($n \geqslant 3$), реализующая f и допускающая единичный проверяющий тест из двух наборов θ, ξ. Отметим, что, поскольку функция f не равна константе, на выходе формулы возникают оба значения 0 и 1, так что длина теста не меньше двух (на одном наборе невозможно обнаружить одну из двух константных неисправностей на выходе выходного элемента, — противоречие с неизбыточностью формулы S). Функцию от переменных формулы S, реализуемую на выходе функционального элемента $\mathcal{E}$ в отсутствие неисправностей, как и раньше, будем обозначать через $f_{\mathcal{E}}$. Функция f является нелинейной, следовательно, в S найдется такой ближайший к выходу формулы косой конъюнктор E, что функция f_E — нелинейная, в каждой вершине, из которой проведена дуга ко входу E, реализуется неравная константе функция, и для всякого функционального элемента $\tilde{E}$, принадлежащего к единственной простой ориентированной цепи C от косого конъюнктора E к выходу формулы S, функция $f_{\tilde{E}}$ также является нелинейной. Если подобных косых конъюнкторов в S имеется несколько, любой из них можно взять в качестве E. Пусть u (v) — та вершина, дуга из которой ведет к левому (соответственно правому) входу косого конъюнктора E. Поскольку на выходе E в отсутствие неисправностей возникают оба булевых значения, имеем: $f_E(\theta) \neq f_E(\xi)$. Пусть, не ограничивая общности, $f_E(\theta) = 0$, $f_E(\xi) = 1$ (и, значит, на наборе ξ на левом входе элемента E возникает единичное значение, а на правом — нулевое). Переберем различные подслучаи.

Подслучай 2.1. Допустим, в вершинах u, v находятся функциональные элементы (назовем их соответственно E', E''). По определению элемента E в вершинах u, v реализуются отличные от констант функции, так что $f_{E'}(\theta) \neq f_{E'}(\xi)$, $f_{E''}(\theta) \neq f_{E''}(\xi)$. Так как $f_E(\xi) = 1$, имеем: $f_{E'}(\xi) = 1$, $f_{E''}(\xi) = 0$, $f_{E'}(\theta) = 0$, $f_{E''}(\theta) = 1$. При этом на наборах θ, ξ должны обнаруживаться обе константные неисправности на выходах E', E''. Но E — косой конъюнктор, и обнаружить все эти неисправности невозможно. Так как $f_{E'}(\theta) = 0$, то на наборе θ нельзя обнаружить неисправность типа «0» на выходе E'', ибо на выходе E и при наличии этой неисправности, и при отсутствии неисправностей возникает 0, так что значения на выходе схемы в обоих этих случаях будут равными (на наборе ξ также невозможно обнаружить неисправность типа «0» на выходе E'', поскольку $f_{E''}(\xi) = 0$). Пришли к противоречию.

Подслучай 2.2. Допустим, хотя бы одна из вершин u, v является входной вершиной формулы S. Предположим, что вершине u или вершине v приписана переменная x_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

2.2.1. По определению элемента E на цепи C не может оказаться такого функционального элемента e, что $f_e \equiv 0$ или $f_e \equiv 1$. Наборы θ, ξ составляют проверяющий тест, значит, на наборах θ и ξ на выходе всякого функционального элемента цепи C появляются оба булевых значения.

2.2.2. Пусть $\hat{E}$ — такой ближайший к E элемент эквивалентности на цепи C, что к его входу, не участвующему в передаче сигналов вдоль цепи C, проведена дуга из вершины w, в которой на наборах θ, ξ появляются оба булевых значения. Но, значит, $f_{\hat{E}}(\theta) = f_{\hat{E}}(\xi)$, а это противоречит неизбыточности формулы S ввиду того, что некоторая нетривиальная константная неисправность на выходе элемента $\hat{E}$ не может быть обнаружена.

2.2.3. Если условие п. 2.2.2 не выполняется, то на цепи C могут оказаться элементы только со следующими свойствами:

1. элементы эквивалентности, к не участвующим в передаче сигналов вдоль цепи C входам которых проведены дуги лишь из входных вершин (более того, каждая из приписанных таким входным вершинам переменных должна принмать одинаковые значения на наборах θ, ξ),

2. элементы эквивалентности, к не участвующим в передаче сигналов вдоль цепи C входам которых проведены дуги лишь из таких вершин, в которых реализуются тождественные константы, а также

3. косые конъюнкторы, к не участвующим в передаче сигналов вдоль цепи C входам которых проведены дуги лишь из таких вершин, в которых реализуются константы (причем константы, не превращающие функции на выходах этих косых конъюнкторов в константы 0).

2.2.3.1. Допустим, в цепи C встречается элемент эквивалентности, к одному из входов которого проведена дуга из входной вершины формулы S. Тогда на выходе формулы S реализуется булева функция вида $g = x_i^\sigma\varphi \oplus \lambda$, где $\sigma \in \{0, 1\}$, φ — некоторая булева функция, а λ — линейная булева функция. Но в таком случае, поскольку функция $f = m(x_1, x_2, x_3)$ — нелинейная, каждое слагаемое максимальной степени полинома Жегалкина функции f обязано содержать переменную x_i, следовательно, по теореме о единственности полинома Жегалкина у булевой функции, $g \neq m(x_1, x_2, x_3)$, — противоречие.

2.2.3.2. При невыполнении условий пунктов 2.2.2 и 2.2.3.1 для любого элемента (эквивалентности или косой конъюнкции) цепи C справедливо, что к не участвующему в передаче сигналов вдоль цепи C его входу проведена дуга из вершины, в которой реализуется тождественная константа. Тогда на выходе формулы S реализуется булева функция вида $g = x_i^\sigma\varphi\oplus d$, где $\sigma, d \in \{0, 1\}$, а φ — некоторая функция. Но значение функции g при $x_i = \bar{\sigma}$ не зависит от значений не равных x_i существенных переменных функции $f = m(x_1, x_2, x_3)$, поэтому $g \neq m(x_1, x_2, x_3)$. Противоречие с тем, что формула S реализует f.

Поскольку в каждом возможном варианте мы пришли к противоречию, заключаем: длина минимального проверяющего теста для произвольной неизбыточной формулы, реализующей медиану $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$, не меньше трех. При любом натуральном n, $n \geqslant 3$, имеем: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, n) \geqslant L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, m(x_1, x_2, x_3)) \geqslant 3$.

Случай 3. Теперь утверждение леммы для случая базиса B, $B \in \{B^*_1,\ B^*_2,\ B^*_3\}$ вытекает из случаев 1 и 2 доказательства данной леммы в силу принципа двойственности.

Лемма доказана. □

В следующей лемме устанавливается, в частности, верхняя оценка 3 функции Шеннона длины единичного проверяющего теста относительно произвольных константных неисправностей на выходах функциональных элементов в базисе $B_1 = \{xy,\ x \oplus y,\ 1\}$.

Лемма 2. $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(O^{\mathrm{c}}_1, n) = 1$ *при* $n = 0$. $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(O^{\mathrm{c}}_1, n) = 2$ *при* $n = 1$. *При любом* n, $n \geqslant 2$, $n \in \mathbb{N}$, *имеет место оценка* $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(O^{\mathrm{c}}_1, n) \leqslant 3$.

Доказательство. Пусть n — целое положительное, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция.

Случай 1. Пусть число существенных переменных функции f равно нулю. При $f \equiv 0$ (f — константа ноль) неизбыточная формула $(x_1 \oplus x_1)$ обладает единичным проверяющим тестом $\{(0)\}$: неисправность типа «1» на выходе элемента сложения по модулю 2 обнаруживается на наборе (0), неисправность типа «0» на выходе элемента сложения по модулю 2 тривиальна и не должна обнаруживаться. Ясно, что всякая формула, реализующая константу, содержит выходной элемент с тривиальной необнаруживаемой неисправностью. Обойтись без фиктивной переменной для реализации константы 0 в базисе B_1 можно с помощью формулы $(1 \oplus 1)$, однако для обнаружения нетривиальных неисправностей лучше рассмотреть произвольное значение какой-то фиктивной переменной, считая и в этом случае длину теста равной 1.

Подслучай $f \equiv 1$ предполагает использование формулы 1 без существенных переменных; для обнаружения единственной нетривиальной неисправности (типа «0») лучше и здесь рассмотреть произвольное значение какой-то фиктивной переменной, считая в этом случае длину теста равной 1. Минимальность теста в обоих подслучаях очевидна ввиду наличия двух неравных функций неисправности.

Случай 2. Пусть число существенных переменных функции f равно одному. При $f = x_1$ в формуле x_1 нет функциональных элементов, поэтому $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(O^{\mathrm{c}}_1, f) = 0$.

При $f = \bar{x}_1$ неизбыточная формула $(x_1 \oplus 1)$, очевидно, обладает единичным проверяющим тестом $\{(0),\ (1)\}$. Данная функция принимает оба значения, так что длина минимального теста для f равна двум.

Случай 3. Пусть теперь число существенных переменных функции f не меньше двух (именно, предположим, что функция $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ существенно зависит от всех n переменных, $n \geqslant 2$). Представим функцию f так:

$$f = \bar{x}_1 f_0(x_2, \dots, x_n) \oplus x_1 f_1(x_2, \dots, x_n), \tag{1}$$

где $f_\sigma(x_2, \dots, x_n) = f(\sigma, x_2, \dots, x_n)$ при $\sigma \in \{0, 1\}$. Разложим каждую из функций f_0, f_1 в полином Жегалкина:

$$f_\sigma(x_2, \dots, x_n) = \bigoplus_{i_\sigma=1}^{k_\sigma} K_{\sigma, i_\sigma} \oplus a_\sigma, \tag{2}$$

где $K_{\sigma,i_\sigma} = x_{\sigma,i_\sigma,1} x_{\sigma,i_\sigma,2} \cdots x_{\sigma,i_\sigma,r_{\sigma,i_\sigma}}$ — конъюнкция попарно различных переменных (здесь и далее порядок выполнения конъюнкций в бесскобочных формулах — слева направо), a_σ — константа ($\sigma \in \{0,1\}$, $k_\sigma \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $i_\sigma = \overline{1, k_\sigma}$, $r_{\sigma,i_\sigma} \in \{1, \dots, n-1\}$, $x_{\sigma,i_\sigma,j} \in \{x_2, \dots, x_n\}$ при $j = \overline{1, r_{\sigma,i_\sigma}}$). Пусть, не умаляя общности, ранг каждой конъюнкции $K_{\sigma,1}$ является наименьшим среди всех конъюнкций K_{σ,i_σ} ($i_\sigma = \overline{1, k_\sigma}$). Обозначим $\hat{K}_{0,i_0} = (x_1 \oplus 1) x_{0,i_0,1} x_{0,i_0,2} \cdots x_{0,i_0,r_{0,i_0}}$, $\hat{K}_{1,i_1} = x_1 x_{1,i_1,1} x_{1,i_1,2} \cdots x_{1,i_1,r_{1,i_1}}$. Подставив (2) в (1), с очевидностью придем к следующему представлению функции f:

$$f = (((\dots((((\dots(\hat{K}_{0,1} \oplus \hat{K}_{0,2}) \oplus \dots) \oplus \hat{K}_{0,k_0}) \oplus \hat{K}_{1,1}) \oplus \hat{K}_{1,2}) \oplus \dots) \oplus \hat{K}_{1,k_1}) \oplus a x_1) \oplus a_0, \tag{3}$$

где $a = a_0 \oplus a_1$, а каждое из слагаемых ax_1 и a_0 наличествует в (3) тогда и только тогда, когда не равно константе 0. При этом в случае $k_1 = 0$ слагаемые $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$ в формуле (3) отсутствуют.

Начнем перебирать различные подслучаи.

Подслучай 3.1. Число k_0 является четным, $k_0 > 0$. Пусть, не умаляя общности, $a_0 = 1$ (тогда общее число не равных константе 0 слагаемых в правой части (3) не меньше трех, так что для перехода к варианту $a_0 = 0$ последний встречающийся в (3) явно элемент сложения по модулю 2 следует удалить вместе со смежным с ним элементом «константа 1»: тест для формулы не изменится после подобной модификации).

Пусть $\alpha = (0, 1, \dots, 1)$, $\beta = (1, 1, \dots, 1)$, $\gamma = (0, \gamma')$ — n-разрядные двоичные наборы, а γ' — $(n-1)$-разрядный двоичный набор значений переменных $(x_2, \dots, x_n)$, в котором единичные значения соответствуют переменным $x_{0,1,1}$, $x_{0,1,2}$, …, $x_{0,1,r_{0,1}}$, а нулевые — остальным переменным из множества $\{x_2, \dots, x_n\}$.

Будем в дальнейшем без явного упоминания пользоваться тем, что если в формуле на каком-то наборе в цепочке элементов сложения по модулю 2 появилось неверное значение из-за воздействия источника O_1^{c}, то на этом наборе на выходе последнего элемента цепочки появится неверное значение.

На наборе α обнаруживаются все неисправности типа «0» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{0,1}$, $\hat{K}_{0,2}$, …, $\hat{K}_{0,k_0}$ формулы (3) (действительно, на выходах всех элементов указанных подформул на наборе α возникают значения 1, а сами эти элементы суть либо конъюнкторы, у которых на оба входа поступают значения 1, либо элементы сложения по модулю 2, у которых на входы поступают различные значения, либо элементы «константа 1», поэтому всякая неисправность типа «0» приведет к возникновению неверного значения и на выходе той из перечисленных подформул, где неисправность проявилась, и на выходе всей формулы), все неисправности типа «1» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$ формулы (3) (действительно, на левых входах всех элементов указанных подформул на наборе α возникают значения 0, левые входы этих элементов, начиная со второго, заняты в транспортировке значений вдоль образующей подформулу цепочки элементов, элементы цепочки суть элементы конъюнкции, на правые входы которых поступают значения 1, поэтому любая неисправность типа «1» приведет к возникновению неверного значения и на выходе той из перечисленных подформул, где неисправность проявилась, и на выходе всей формулы), кроме того (по причине того, что k_0 — четное, и того, что на наборе α на выходах всех подформул $\hat{K}_{0,1}$, $\hat{K}_{0,2}$, …, $\hat{K}_{0,k_0}$ формулы (3) возникают значения 1, а на выходах всех подформул $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$, ax_1 формулы (3) возникают значения 0), обнаруживаются все неисправности типа «1» на выходах тех элементов сложений по модулю 2 в формуле (3), к правым входам которых ведет дуга от последней вершины хотя бы одного слагаемого из списка $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$, ax_1, а также неисправности типа «0» на выходах последнего наличествующего явно в (3) элемента сложения по модулю 2 и соединенного с его правым входом элемента «константа 1» (ибо $a_0 = 1$).

На наборе β обнаруживаются все неисправности типа «1» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{0,1}$, $\hat{K}_{0,2}$, …, $\hat{K}_{0,k_0}$ формулы (3), все неисправности типа «0» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$ формулы (3), а также все неисправности типа «1» на выходах тех элементов сложений по модулю 2 в формуле (3), к входам которых ведет дуга от последней вершины хотя бы одного слагаемого из списка $\hat{K}_{0,1}$, $\hat{K}_{0,2}$, …, $\hat{K}_{0,k_0}$.

На наборе γ, поскольку ранг конъюнкции $\hat{K}_{0,1}$ минимален среди рангов всех конъюнкций $\hat{K}_{0,i_0}$ ($i_0 = \overline{1, k_0}$) в формуле (3), на левый вход первого элемента сложения по модулю 2 поступает единичное значение 1, а на все правые входы элементов сложения по модулю 2 поступают нулевые значения. Поэтому на наборе γ обнаруживаются все неисправности типа «0» на выходах всех упомянутых в формуле (3) и встречающихся в ней явно элементов сложения по модулю 2, кроме последнего, а также неисправность типа «1» на выходе последнего упомянутого в формуле (3) и встречающегося в ней явно элемента сложения по модулю 2.

Вследствие того, что на наборах α, β, γ обнаруживаются все константные неисправности на выходах элементов формулы из правой части (3), в данном подслучае имеем: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(O^{\mathrm{c}}_1, f) \leqslant 3$.

Подслучай 3.2. Число k_0 является нечетным. Проварьировав (3), представим функцию f в следующем виде:

$$f=(((...(((...((x_1\oplus 1)\oplus\hat{K}_{0,1})\oplus...)\oplus\hat{K}_{0,k_0})\oplus\hat{K}_{1,1})\oplus...)\oplus\hat{K}_{1,k_1})\oplus\bar{a}x_1)\oplus\bar{a}_0, \quad (4)$$

где $a = a_0 \oplus a_1$, а каждое из слагаемых $\bar{a}x_1$ и $\bar{a}_0$ наличествует в (4) тогда и только тогда, когда не равно константе 0. При этом в случае $k_1 = 0$ слагаемые $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{1,k_1}$ в формуле (4) отсутствуют.

Пусть, не умаляя общности, $\bar{a}_0 = 1$ (тогда общее число не равных константе 0 слагаемых в правой части (4) не меньше трех, так что для перехода к варианту $\bar{a}_0 = 0$ последний встречающийся в (4) явно элемент сложения по модулю 2 следует удалить вместе со смежным с ним элементом «константа 1»: тест для формулы не изменится после подобной модификации).

Пусть $\alpha = (0, 1, \ldots, 1)$, $\beta = (1, 1, \ldots, 1)$, $\delta = (0, 0, \ldots, 0)$ — n-разрядные двоичные наборы.

По аналогии с подслучаем 3.1 установим следующее.

На наборе α обнаруживаются все неисправности типа «0» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{0,1}$, $\hat{K}_{0,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{0,k_0}$ формулы (4), все неисправности типа «1» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{1,k_1}$ формулы (4), также (по причине того, что k_0 — нечетное, и того, что на наборе α на выходах всех подформул $\hat{K}_{0,1}$, $\hat{K}_{0,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{0,k_0}$ формулы (4) возникают значения 1, а на выходах всех подформул $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{1,k_1}$, ax_1 формулы (4) возникают значения 0) обнаруживаются все неисправности типа «1» на выходах тех элементов сложений по модулю 2 в формуле (4), к правым входам которых ведет дуга от последней вершины хотя бы одного слагаемого из списка $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{1,k_1}$, $\bar{a}x_1$, а также неисправности типа «0» на выходах первого и последнего наличествующих явно в (4) элементов сложения по модулю 2 и соединенных с их правыми входами элементов «константа 1».

На наборе β обнаруживаются все неисправности типа «1» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{0,1}$, $\hat{K}_{0,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{0,k_0}$ формулы (4), все неисправности типа «0» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{1,k_1}$

формулы (4), все неисправности типа «1» на выходах тех элементов сложений по модулю 2 и эквивалентности в формуле (4), к входам которых ведет дуга от последней вершины хотя бы одного слагаемого из списка $\hat{K}_{0,1}$, $\hat{K}_{0,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{0,k_0}$, а также неисправность типа «1» на выходе первого наличествующего явно в (4) элемента сложения по модулю 2.

На наборе δ на выходах всех подформул $\hat{K}_{\sigma,i_\sigma}$ ($i_\sigma = \overline{1,k_\sigma}$, $\sigma \in \{0,1\}$) в формуле (4) оказываются значения 0, а на выходах всех элементов сложения по модулю 2 в формуле (4), кроме последнего, оказываются значения 1. Поэтому на наборе δ обнаруживаются все неисправности типа «0» на выходах всех упомянутых в формуле (4) и наличествующих в ней явно элементов сложения по модулю 2, кроме последнего, а также неисправность типа «1» на выходе последнего наличествующего явно в (4) элемента сложения по модулю 2.

Вследствие того, что на наборах α, β, δ обнаруживаются все константные неисправности на выходах элементов формулы из правой части (4), в данном подслучае имеем: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(O^{\mathrm{c}}_1, f) \leqslant 3$.

Подслучай 3.3. Число k_1 является четным (при этом $k_1>0$, ибо функция f обладает не менее чем двумя существенными переменными), $k_0 = 0$. Проварьировав (3), представим функцию f в следующем виде:

$$f = (((...(\hat{K}_{1,1} \oplus \hat{K}_{1,2}) \oplus ...) \oplus \hat{K}_{1,k_1}) \oplus ax_1) \oplus a_0, \qquad (5)$$

где $a = a_0 \oplus a_1$, а каждое из слагаемых ax_1 и a_0 наличествует в (5) тогда и только тогда, когда не равно константе 0. Поскольку функция f обладает по крайней мере двумя существенными переменными, а $k_1 \geqslant 2$, в правой части (5) наличествует не менее двух не равных константе 0 слагаемых.

Пусть, не умаляя общности, $a_0 = 1$ (тогда общее число не равных константе 0 слагаемых в правой части (5) не меньше трех, так что для перехода к варианту $a_0 = 0$ последний встречающийся в формуле (5) явно элемент сложения по модулю 2 следует удалить вместе со смежным с ним элементом «константа 1»: тест для формулы не изменится после подобной модификации).

Пусть $\alpha = (0, 1, \ldots, 1)$, $\beta = (1, 1, \ldots, 1)$, $\eta = (1, \eta')$ — n-разрядные двоичные наборы, а η' — $(n-1)$-разрядный двоичный набор значений переменных $(x_2, \ldots, x_n)$, в котором единичные значения соответствуют переменным $x_{1,1,1}$, $x_{1,1,2}$, $\ldots$, $x_{1,1,r_{1,1}}$, а нулевые — остальным переменным из множества $\{x_2, \ldots, x_n\}$.

По аналогии с подслучаем 3.1 установим следующее.

На наборе α обнаруживаются все неисправности типа «1» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{1,k_1}$ формулы (5), все неисправности типа «1» на выходах тех элементов сложений по модулю 2 в формуле (5), к входам которых ведет дуга от последней вершины хотя бы одного слагаемого из списка $\hat{K}_{1,1}, \hat{K}_{1,2}, \ldots, \hat{K}_{1,k_1}, ax_1$ (при $a = 1$) (по причине того, что на наборе α на выходах всех подформул $\hat{K}_{1,1}, \hat{K}_{1,2}, \ldots, \hat{K}_{1,k_1}$ формулы (5) возникают значения 0), а также обнаруживаются неисправности типа «0» на выходах последнего присутствующего явно в (5) элемента сложения по модулю 2 и смежного с ним элемента «константа 1».

На наборе β обнаруживаются все неисправности типа «0» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{1,k_1}$ формулы (5). Далее, по причине чётности числа k_1 на наборе β обнаруживается неисправность типа «0» на выходе того функционального элемента сложения по модулю 2 в формуле (5), к правому входу которого ведет дуга от входной вершины x_1 (т. е. к его правому входу подсоединено слагаемое ax_1 при $a = 1$), а, кроме того, при $a = 1$ обнаруживается неисправность типа «1» на выходе последнего присутствующего явно в (5) элемента сложения по модулю 2.

На наборе η, поскольку ранг конъюнкции $\hat{K}_{1,1}$ минимален среди рангов всех конъюнкций $\hat{K}_{1,i_1}$ $(i_1 = \overline{1,k_1})$ в формуле (5), значение на выходе подформулы $\hat{K}_{1,1}$ равно 1, а значения на выходах подформул $\hat{K}_{1,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{1,k_1}$ равны 0. Поэтому на наборе η обнаруживаются все одиночные неисправности типа «0» на выходах всех упомянутых в формуле (5) и наличествующих в ней явным образом элементов сложения по модулю 2, к хотя бы одному входу которых ведет дуга от последней вершины слагаемого из списка $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, $\ldots$, $\hat{K}_{1,k_1}$, а также при $a = 0$ обнаруживается неисправность типа «1» на выходе последнего наличествующего явно в (5) элемента сложения по модулю 2.

Вследствие того, что на наборах α, β, η обнаруживаются все константные неисправности на выходах элементов формулы из правой части (5), в данном подслучае имеем: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(O^{\mathrm{c}}_1, f) \leqslant 3$.

Подслучай 3.4. Число k_1 является нечетным, $k_0 = 0$. Проварьировав (3), представим функцию f в следующем виде:

$$f = (((...((x_1 \oplus \hat{K}_{1,1}) \oplus \hat{K}_{1,2}) \oplus ...) \oplus \hat{K}_{1,k_1}) \oplus \bar{a}x_1) \oplus a_0, \tag{6}$$

где $a = a_0 \oplus a_1$, а каждое из слагаемых $\bar{a}x_1$ и a_0 наличествует в (6) тогда и только тогда, когда не равно константе 0. Из того, что функция f обладает не менее чем двумя существенными переменными, а $k_1 \geqslant 1$, следует, что в правой части (6) наличествует не менее двух не равных константе 0 слагаемых.

Пусть, не умаляя общности, $a_0 = 1$ (тогда общее число не равных константе 0 слагаемых в правой части (6) не меньше трех, так что для перехода к варианту $a_0 = 0$ последний встречающийся в (6) явно элемент сложения по модулю 2 следует удалить вместе со смежным с ним элементом «константа 1»: тест для формулы не изменится после подобной модификации).

Пусть $\alpha = (0, 1, \ldots, 1)$, $\beta = (1, 1, \ldots, 1)$, $\zeta = (1, 0, \ldots, 0)$ — n-разрядные двоичные наборы.

На наборе α обнаруживаются все неисправности типа «1» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$ формулы (6), все одиночные неисправности типа «1» на выходах тех элементов сложений по модулю 2 в формуле (6), к входам которых ведет дуга от последней вершины хотя бы одного слагаемого из списка x_1, $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$ и — при $\bar{a} = 1$ — $\bar{a}x_1$ (поскольку на наборе α на выходах всех подформул $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$ формулы (6) возникают значения 0), кроме того, обнаруживаются неисправности типа «0» на выходах последнего присутствующего явно в (6) элемента сложения по модулю 2 и смежного с ним элемента «константа 1».

На наборе β обнаруживаются все неисправности типа «0» на выходах элементов в подформулах $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$ формулы (6). Далее, так как число k_1 является нечетным, на наборе β обнаруживается неисправность типа «0» на выходе того функционального элемента сложения по модулю 2 в формуле (6), к правому входу которого ведет дуга от входной вершины x_1 (т. е. к его правому входу подсоединено слагаемое $\bar{a}x_1$ при $\bar{a} = 1$), кроме того, при $\bar{a} = 1$ обнаруживается неисправность типа «1» на выходе последнего наличествующего явно в (6) элемента сложения по модулю 2.

На наборе ζ на выходах подформул $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$ формулы (6) возникают значения 0. Поэтому на наборе ζ обнаруживаются все неисправности типа «0» на выходах всех упомянутых в (6) и наличествующих в ней явно элементов сложения по модулю 2, к входам которых ведет дуга от последней вершины хотя бы одного слагаемого из списка $\hat{K}_{1,1}$, $\hat{K}_{1,2}$, …, $\hat{K}_{1,k_1}$. Кроме того, при $\bar{a} = 0$ на наборе ζ обнаруживается неисправность типа «1» на выходе последнего наличествующего явно в (6) элемента сложения по модулю 2.

Вследствие того, что на наборах α, β, ζ обнаруживаются все константные неисправности на выходах элементов формулы из правой части (6), в данном подслучае имеем: $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B_1}(O^{\mathrm{c}}_1, f) \leqslant 3$.

Все возможные случаи изучены, лемма доказана. □

Имеет место следующая лемма.

Лемма 3. *Пусть B — произвольный базис, лежащий в множестве $\{B^*_1, B_2, B^*_2, B_3, B^*_3\}$. Тогда справедливы такие соотношения. $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, n) = 1$ при $n = 0$. $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, n) = 2$ при $n = 1$. При любом n, $n \geqslant 3$, $n \in \mathbb{N}$, имеет место оценка $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, n) \leqslant 3$. Для любого базиса B из $\{B^*_1, B_2, B^*_2\}$ при $n = 2$ верно равенство $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, n) = 3$. Для любого базиса B из $\{B_3, B^*_3\}$ при $n = 2$ верно равенство $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O^{\mathrm{c}}_1, n) = 2$.*

Доказательство. Случай 1. Утверждение леммы для базиса $B =$

$B_1^* = \{x \vee y,\, x \sim y,\, 0\}$ мгновенно вытекает из леммы 2 в силу принципа двойственности.

Случай 2. Рассмотрим базис $B = B_2 = \{xy,\, x \sim y,\, 0\}$. Рассуждения для функций f, существенно зависящих не более чем от одной переменной, двойственны рассуждениям случаев 1 и 2 в доказательстве леммы 2.

Пусть теперь произвольная булева функция f существенно зависит от n переменных, $n \geqslant 2$. Построим в соответствии со случаем 3 доказательства леммы 2 формулу (назовем ее S) для той из функций f, $\bar{f}$, для которой на правый вход выходного элемента сложения по модулю 2 подается дуга от выхода элемента «константа 1». В этой формуле S заменим все элементы сложения по модулю 2 на элемента эквивалентности, а все элементы «константа 1» — на элементы «константа 0» (при этом все подформулы вида $(x_1 \oplus 1)$ заменятся на равные им подформулы $(x_1 \sim 0)$, а цепочка Z всех элементов сложения по модулю 2, не лежащих внутри подформул $\hat{K}_{\sigma,i_\sigma}$ ($\sigma \in \{0,1\}$, $i_\sigma = \overline{1,k_\sigma}$), превратится в цепочку Z' такой же длины из элементов эквивалентности). Очевидно, построенная схема S' реализует одну из функций f, $\bar{f}$. Легко видеть, что единичный проверяющий тест для S' совпадает с единичным проверяющим тестом для S. Действительно, подформулы $\hat{K}_{\sigma,i_\sigma}$ ($\sigma \in \{0,1\}$, $i_\sigma = \overline{1,k_\sigma}$) заменились на равные им подформулы, у подформул $(x_1 \oplus 1)$ и $(x_1 \sim 0)$ неисправности одновременно проверяемы, так что остается изучить только обнаружение неисправностей элементов цепи Z' и смежного с выходным элементом сложения по модулю 2 элемента «константа 1». Но значения на не участвующих в передаче сигнала вдоль цепи входах элементов цепочки Z' и соответствующих им входах элементов цепочки Z на каждом наборе построенного в лемме 2 теста совпадают, так что в зависимости от четности порядкового номера элемента в цепочке Z' на его выходе будут появляться или такие же, как на выходе соответствующего ему элемента Z, или противоположные значения. Но поскольку оба значения появляются на выходе каждого элемента Z в S (и в силу этого обе константные неисправности на выходе этого элемента обнаруживаются на наборах теста), на выходе каждого элемента из Z' в S' на наборах теста также появляются оба значения (и в силу этого обе константные неисправности на выходе этого элемента также обнаруживаются на наборах теста). Отметим, что обнаруживаемость неисправностей всех элементов «константа 0» в S' представляется очевидной. Для построения искомой неизбыточной формулы $\hat{S}$ над базисом B_2, реализующей функцию f и допускающей единичный проверяющий тест длины 3, остается при необходимости удалить выходной элемент сложения по модулю 2 вместе со смежным с ним элементом «константа 0» и инцидентными дугами.

Случай 3. Утверждение леммы для базиса $B = B_2^* = \{x \vee y,\, x \oplus y,\, 1\}$

теперь мгновенно вытекает из случая 2 в силу принципа двойственности.

Случай 4. Рассмотрим базис $B = B_3 = \{x\bar{y},\, x \sim y\}$.

Подслучай 4.1. Пусть $n \in \{0, 1\}$. В силу того, что $0 \equiv x_1\bar{x}_1$, легко установить, что рассуждения для функций f, существенно зависящих не более чем от одной переменной, двойственны рассуждениям случаев 1 и 2 в доказательстве леммы 2.

Подслучай 4.2. Пусть теперь произвольная булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от двух переменных. Из предыдущего подслучая следует, что $L^{\mathrm{dt}}_{\mathrm{F},B}(O_1^{\mathrm{c}}, n) \geqslant 2$ при $n = 2$. Покажем, что всякая (с точностью до конгруэнтности) булева функция $f(x_1, x_2)$ может быть реализована неизбыточной формулой над базисом $B = B_3 = \{x\bar{y},\, x \sim y\}$, допускающей единичный проверяющий тест длины не более двух относительно произвольных константных неисправностей на выходах элементов. В качестве обоснования для каждой такой булевой функции в таблице 1 приведены реализующая ее формула и множество из двух наборов значений переменных x_1, x_2; доказательства неизбыточности формулы и того, что множество наборов образует единичный проверяющий тест для формулы, опускаются ввиду простоты (обозначим через $\&^{\neg}(x, y)$ функцию $x\bar{y}$).

Таблица 1.

Функция	Формула	Проверяющий тест
$x_1 \sim x_2$	$x_1 \sim x_2$	$\{(1,0),(1,1)\}$
$x_1 \oplus x_2$	$(x_1 \sim x_2) \sim (\&^{\neg}(x_1, x_1))$	$\{(1,0),(1,1)\}$
$x_1 \,\&\, x_2$	$\&^{\neg}(x_1, x_2 \sim \&^{\neg}(x_1, x_1))$	$\{(1,0),(1,1)\}$
$\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2$	$\&^{\neg}(x_1, x_2 \sim \&^{\neg}(x_1, x_1)) \sim \&^{\neg}(x_1, x_1)$	$\{(1,0),(1,1)\}$
$x_1 \,\&\, \bar{x}_2$	$\&^{\neg}(x_1, x_2)$	$\{(1,0),(1,1)\}$
$\bar{x}_1 \vee x_2$	$\&^{\neg}(x_1, x_2) \sim \&^{\neg}(x_1, x_1)$	$\{(1,0),(1,1)\}$
$\bar{x}_1 \,\&\, \bar{x}_2$	$\&^{\neg}(x_2, x_1) \sim x_1$	$\{(0,0),(0,1)\}$
$x_1 \vee x_2$	$(\&^{\neg}(x_2, x_1) \sim x_1) \sim \&^{\neg}(x_1, x_1)$	$\{(0,0),(0,1)\}$

Подслучай 4.3. Пусть теперь произвольная булева функция $f(x_1, \ldots, x_n)$ существенно зависит от n переменных, $n \geqslant 3$. Построим в соответствии со случаем 2 доказательства настоящей леммы формулу $\hat{S}$ для функции $\hat{f}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)$. В этой формуле заменим все конъюнкторы на элементы «косая конъюнкция» (в которых инвертированы правые входы, соответствующие правым входам конъюнкторов), а все элементы «константа 0» — на подформулы вида $x_1\bar{x}_1$. Очевидно, полученная формула $\hat{S}'$ неизбыточна, реализует функцию f и допускает единичный проверяющий тест длины 3, получаемый из теста для $\hat{S}$ инвертированием значений переменных $x_2, \ldots, x_n$.

Случай 5. Утверждение леммы для базиса $B = B_3^* = \{x \vee \bar{y}, x \oplus y\}$ теперь мгновенно вытекает из случая 4 в силу принципа двойственности.

Лемма доказана. $\square$

Теперь утверждение теоремы 1 оказывается следствием лемм 1–3. $\square$

Список литературы

1. *Ложкин С. А. Лекции по основам кибернетики.* М.: Изд. отдел ф-та ВМиК МГУ, 2004.

2. *Редькин Н. П.* Единичные проверяющие тесты для схем при инверсных неисправностях элементов // *Матем. вопр. киберн.* Вып. 12. М.: Физматлит, 2003. С. 217–230.

3. *Reddy S. M.* Easily testable realization for logic functions // *IEEE Trans. Comput.* 1972. V. C-21, N 11. P. 1183–1188.

4. *Kodandapani K. L.* A note on easily testable realizations for logic functions // *IEEE Trans. Comput.* 1974. V. C-23, N 3. P. 332–333.

5. *Редькин Н. П. Надежность и диагностика схем.* М.: Изд-во Моск. ун-та, 1992.

6. *Коляда С. С.* О единичных проверяющих тестах для константных неисправностей на выходах функциональных элементов // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.* 2011. № 6. С. 47–49.

7. *Коляда С. С.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов в базисах из элементов, имеющих не более двух входов // *Дискр. анализ и иссл. операций.* 2013. Т. 20, № 2. С. 58–74.

8. *Коляда С. С.* Единичные проверяющие тесты для схем из функциональных элементов // *Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Матем. Мех.* 2013. № 4. С. 32–34.

9. *Коляда С. С. Верхние оценки длины проверяющих тестов для схем из функциональных элементов.* Дис. … канд. физ.-мат. наук: 01.01.09. М.: 2013.

10. *Романов Д. С., Романова Е. Ю.* Метод синтеза неизбыточных схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // *Дискр. матем.* 2017. Т. 29, № 4. С. 87–105.

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 119-141
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 119-141

11. *Романов Д. С.* Метод синтеза легкотестируемых схем, допускающих единичные проверяющие тесты константной длины // *Дискр. матем.* 2014. Т. 26, № 2. С. 100–130.

12. *Попков К. А.* Нижние оценки длин единичных тестов для схем из функциональных элементов // *Дискр. матем.* 2017. Т. 29, № 2. С. 53–69.

13. *Попков К. А.* Короткие единичные тесты для схем при произвольных константных неисправностях на выходах элементов // *Дискр. матем.* 2018. Т. 30, № 3. С. 99–116.

14. *Попков К. А.* Короткие единичные тесты для схем в базисе Жегалкина при произвольных константных неисправностях элементов // *Матем. заметки.* 2025. Т. 117, № 5. С. 736–749.

References

1. *Lozhkin S. A. Lectures on Fundamentals of Cybernetics (Lektsii po Osnovam Kibernetiki, in Russian).* Moscow: Publishing Dept. of CMC Faculty of Lomonosov Moscow State University, 2004.

2. *Red'kin N. P.* Single fault detection test sets for circuits with respect to inverse faults of gates (in Russian) // *Matematicheskie Voprosy Kibernetiki.* N 12. Moscow: Fizmatlit, 2003. P. 217–230.

3. *Reddy S. M.* Easily testable realization for logic functions // *IEEE Trans. Comput.* 1972. V. C-21, N 11. P. 1183–1188.

4. *Kodandapani K. L.* A note on easily testable realizations for logic functions // *IEEE Trans. Comput.* 1974. V. C-23, N 3. P. 332–333.

5. *Red'kin N. P. Reliability and Diagnostics of Circuits (Nadezhnost' i Diagnostika Skhem, in Russian).* Moscow: Moscow University Publishing House, 1992.

6. *Kolyada S. S.* Single checking output tests under constant faults for functional elements (in Russian) // *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.* 2011. N 6. S. 47–49.

7. *Kolyada S. S.* Single checking tests for circuits of functional elements in fan-in 2 bases (in Russian) // *Diskretn. Anal. Issled. Oper..* 2013. V. 20, N 2. P. 58–74.

8. *Kolyada S. S.* Single checking tests for circuits of functional elements (in Russian) // *Vestnik Moskov. Univ. Ser. 1. Mat. Mekh.* 2013. N 4. P. 32–34.

9. *Kolyada S. S. Upper Bounds of Length of Checking Tests for Circuits of Functional Elements (Verkhnie Otsenki Dliny Proveriayushchikh Testov dlia Skhem iz Funktsional'nykh Elementov, in Russian).* Thesis ... candidate of physical and mathematical sciences: 01.01.09. Moscow: 2013.

10. *Romanov D. S., Romanova E. Yu.* A method of synthesis of irredundant circuits admitting single fault detection tests of constant length // *Discrete Math. Appl.* 2019. V. 29, N 1. P. 35–48.

11. *Romanov D. S.* Method of synthesis of easily testable circuits admitting single fault detection tests of constant length // *Discrete Math. Appl.* 2014. V. 24, N 4. P. 227–251.

12. *Popkov K. A.* Lower bounds for lengths of single tests for Boolean circuits // *Discrete Math. Appl.* 2019. V. 29, N 1. P. 23–33.

13. *Popkov K. A.* Short single tests for circuits with arbitrary stuck-at faults at outputs of gates // *Discrete Math. Appl.* 2019. V. 29, N 5. P. 321–333.

14. *Popkov K. A.* Short single-fault tests for circuits in the Zhegalkin basis with arbitrary stuck-at faults of gates // *Math. Notes.* 2025. V. 117, N 5–6. P. 826–836.

Информация об авторах

Чжэнюй Цуй, аспирант

Дмитрий Сергеевич Романов, доктор физико-математических наук,
SPIN 9571-0346 AuthorID: 16088
Scopus Author ID 54934982400

Author Information

Zh. Cui, post-graduate student

Dmitrii S. Romanov, Doctor of Mathematics, Associate Professor
SPIN 9571-0346 AuthorID: 16088
Scopus Author ID 54934982400

Статья поступила в редакцию 01.06.2025;

ISSN 1560-750X
Математические труды, 2026, Том 29, № 1, С. 119-141
Mat. Trudy, 2026, V. 29, N. 1, P. 119-141

одобрена после рецензирования 23.10.2025; принята к публикации 21.01.2026

The article was submitted 01.06.2025;
approved after reviewing 23.10.2025; accepted for publication 21.01.2026